შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №	22.04.2012/ მათ/ II/107

ამოცანა № 4   გვერდი № 1

$f(x+yf(x))=f(f(x))+xf(y)$

$x=0$

$f(yf(0))=f(f(0))$

თუ $f(0)\neq 0 \Rightarrow yf(0)$ შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა $\Rightarrow f(x)=f(f(0))$ $x\in R$

$f(f(0))\equiv c \Rightarrow f(x)=c$

$f(x+yf(x))=f(f(x))+xf(y)$

$c=c+xc \Rightarrow c=0$ ანუ 1 ამონახსნია $\boxed{f(x)=0}$; $x\in R$

დარჩა შემთხვევა როცა $f(0)=0$.

$y=0$

$\underline{f(x)=f(f(x))}$

x- ჩავსვათ $f(x)$

$f(f(x)(y+1))=f(x)+f(x)f(y)=f(x)(f(y)+1)$

$y=-1 \Rightarrow f(f(x)(y+1))=0 \Rightarrow f(y)+1=0 \Rightarrow \underline{f(-1)=-1}$

$f(x+yf(x))=f(x)+xf(y)$

$x=-1$

$\underline{f(-1-y)=-1-f(y)}$

$f(x+xf(x))=f(x)+xf(x)$

$f(x(f(x)+1))=f(x)(x+1)$

$y=-1$

$f(x-f(x))=f(x)-x$

$f(x-f(x))=-(x-f(x))$

თუ ვიპოვეთ $f(x)\neq x$ მაშინ

$t=x-f(x)$

$f(t)=-t \Rightarrow f(t)\neq f(f(t))$

$f(f(t))=t$

ანუ $f(x)=x$ $x\in R$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 107

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

[illegible] $f(x) \neq x$

$t = x - f(x)$

$f(t) = -t$

$\cancel{f(t - f(t)) = f(0) = 0 = f(t) - t = -2t \Rightarrow t = 0}$

~~[illegible]~~ $\cancel{x = f(x)}$

~~[illegible]~~ $\cancel{f(x) = x \quad x \in R}$

$f(t - f(t)) = f(t - (-t)) = f(2t) = f(t) - t = -2t$

აქ მივიღეთ წინააღმდეგობა.

[illegible] ამოხსნა $f(x) = x \quad x \in R$, რომელიც [illegible] [illegible] [illegible] პირობას აკმაყოფილებს.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

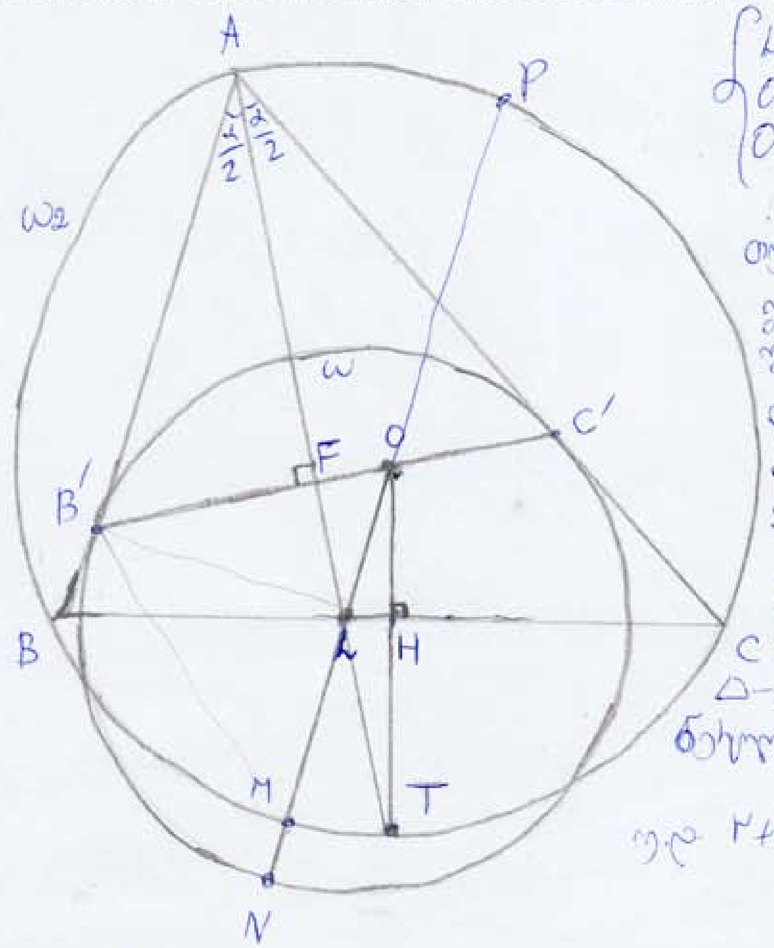
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 107

ამოცანა № 5

გვერდი № 1



$$\begin{cases} LB' = r \\ OA = R \\ OL = \ell \end{cases}$$

თუ დავამტკიცებთ, რომ $OL + LN > OM$ მაშინ N წერტილი არის $\triangle ABC$-ზე შემოხაზული წრეწირის გარეთ, რომელიც ამავე დროს ω-ს მოხვდება და ცხადია ეს ორი წრეწირი 2 წერტილში გადაიკვეთება, რადგან L წერტილი არის ω-ს ცენტრი ω_2 წრეწირში მოთავსებული, რადგან $\triangle$-ზე შემოხაზულ წრეწირში ყველა წერტილი ჰორდების წვეროების გარეთ.

ე.ი. $r + \ell > R$.

$$\begin{cases} LC' = LB' = r \\ \angle LC'A = \angle LB'A = 90^\circ \\ AL \text{ საერთო} \end{cases} \Rightarrow \triangle AB'L = \triangle AC'L \Rightarrow AL \text{ არის } \angle B'AC'\text{-ის}$$

ბისექტრისა. მაშინ $\breve{BT} = \breve{CT}$. ცხადია თუ O-დან BC-ზე მართობს დავუშვებთ იგი BC-ს შუაში გაივლის და გაკვეთს T წერტილში.

$$\begin{cases} AC = b \\ AB = c \\ BC = a \end{cases} \quad BL = \frac{ac}{b+c} \quad AL = \sqrt{bc - \frac{ac \cdot ba}{(b+c)^2}} = \sqrt{\frac{bc\,(b^2+c^2+2bc - b^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha)}{(b+c)^2}} =$$

$$CL = \frac{ba}{b+c} \quad = \frac{bc}{b+c}\sqrt{2+2\cos\alpha}$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 107

ამოცანა № 5

გვერდი № 2

$BL \cdot LC = ML \cdot LP$

$\frac{a^2bc}{(b+c)^2} = ML(2R - ML)$

$ML^2 - 2R \cdot ML + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = 0.$

$D = 4R^2 - \frac{4a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{a^2}{\sin^2\alpha} - \frac{4a^2bc}{(b+c)^2}$

$\frac{a^2bc}{(b+c)^2} = (R-e)(R+e) = R^2 - e^2$

$e^2 = R^2 - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$

$AT \perp B'C'$

$\triangle TFO \sim \triangle TML$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 107

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$$\frac{1}{a^2-2a+5}+\frac{1}{b^2-2b+5}+\frac{1}{c^2-2c+5}=\frac{1}{(a-1)^2+4}+\frac{1}{(b-1)^2+4}+\frac{1}{(c-1)^2+4}=$$

$$=\frac{1}{(b+c)^2+4}+\frac{1}{(a+c)^2+4}+\frac{1}{(a+b)^2+4}=S$$

$$\begin{cases} b+c=x \\ a+c=y \\ a+b=z \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2+4}+\frac{1}{y^2+4}+\frac{1}{z^2+4} - \min - ? \qquad x+y+z=2.$$

გავაკეთოთ ასეთი დაშვება, რომ თუ $x\le y$ და $t\le x$. მაშინ:

$$\frac{1}{x^2+4}+\frac{1}{y^2+4}\le\frac{1}{(x-t)^2+4}+\frac{1}{(y+t)^2+4}$$

მაშინ ნებისმიერი (x,y,z) სამეულისთვის $x+y+z=2$. სამეულიდან $(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3})$ შევძლებთ დავიდეთ მასზე ასეთი ოპერაციებით. ვინაიდან რიცხვი 2 და ნაკლები დავიყვანოთ მასზე ნაკლები არ იქნება t და ყველა დანარჩენს დავუმატოთ ~~[illegible]~~ t. შედეგად ყოველ ბიჯზე ჯამი მინიმალურს იზრდება ან იგივე რჩება. ანუ სამართლი

$$\frac{1}{x^2+4}+\frac{1}{y^2+4}+\frac{1}{z^2+4}\ge\frac{1}{(\frac{2}{3})^2+4}\cdot 3$$

თითოეულ ოპერაციაზე $x+y+z$-ის ჯამი იგივე ანუ 2 რჩება.

ანუ $\min(S)=\frac{1}{\frac{4}{9}+4}\cdot 3=\frac{9}{4+36}\cdot 3=\frac{27}{40}.$